

# 数学与文化

——《数学与文化》序言

齐民友

讨论文化问题，可以列举文化的各个部门：科学、文学、艺术、政治、宗教、伦理……请注意，数学也是文化的一部分。数学和任何其他学科不同，它几乎是任何科学所不可缺少的。没有任何一门科学能像它那样泽被天下。它是现代科学技术的语言和工具，这一点大概没有什么人会怀疑了。它的思想是许多物理学说的核心，并为它们的出现开辟了道路，了解这一点的人就比较少了。它曾经是科学革命的旗帜，现代科学之所以成为现代科学，第一个决定性的步骤是使自己数学化。为什么会这样？因为数学在人类理性思维活动中有一些特点。这些特点的形成离不开各个时代的总的文化背景，同时又是数学影响人类文化最突出之点。我这里并不想概括什么是数学文化，而只是就它对人类精神生活影响最突出之处提出一些看法。诚然，其他的学科也可能有这些特点，但大抵是与受数学的影响分不开的。

首先，它追求一种完全确定、完全可靠的知识。在这本小书里可以看到许多被吸引到数学中来的人正是因为数学有这样的特点。例如说，欧几里得平面上的三角形内角和为 $180^\circ$ ；这绝不是说“在某种条件下”，“绝大部分”三角形的内角和“在某种误差范围内”为 $180^\circ$ ；而是在命题的规定范围内，一切三角形的内角和不多不少为 $180^\circ$ 。产生这个特点的原因可以由其对象和方法两个方面来说明。从希腊的文化背景中形成了数学的对象并不只是具体问题，数学所探讨的不是转瞬即逝的知识，而是某种永恒不变的东西。所以，数学的对象必须有明确无误的概念，而且其方法必须由明确无误的命题开始，并服从明确无误的推理规则，借以达到正确的结论。通过纯粹的思维竟能在认识宇宙上达到如此确定无疑的地步，当然会给一切需要思维的人以极大的启发。人们自然会要求在一切实领域中都这样去做。正是因为这样，而且也仅仅因为这样，数学方法既成为人类认识方法的一个典范，也成为人在认识宇宙和人类自己时必须持有的客观态度的一个标准。就数学本身而言，达到数学真理的途径既有逻辑的方面也有直觉的方面，但就其与其他科学比较而言，就其影响人类文化的其他部门而言，它的逻辑方法是最突出的。这个方法发展成为人们常说的公理方法。迄今为止，人类知识还没有哪一个部门应用公理方法得到如数学那样大的成功。但是，如果到今天某个知识部门还是只有论断而没有论据，只是一堆相互没有逻辑联系的命题，前后又无一贯性，恐怕是不会有人接受的了。每个论点都必须有根据，都必须持之有理。除了逻辑的要求和实践的检验以外，无论是几千年的习俗、宗教的权威、皇帝的敕令、流行的风尚统统是没有用的。这样一种求真的态度，倾毕生之力用理性的思维去解开那伟大而永恒的谜——宇宙和人类的真面目是什么？——是人类文化发展到高度的标志。这个伟大的理性探索是数学发展必不可少的文化背景，反过来也是数学贡献于文化最突出的功绩之一。

数学作为人类文化组成部分的另一个特点是它不断追求最简单的、最深层次的、超出

人类感官所及的宇宙的根本。所有这些研究都是在极抽象的形式下进行的。这是一种化繁为简以求统一的过程。从古希腊起，人们就有一个信念：冥冥之中最深处宇宙有一个伟大的、统一的、而且简单的设计图，这是一个数学设计图。在一切比较深入的科学研究后面，必定有一种信念驱使我们。这个信念就是：世界是合理的，简单的，因而是可以理解的。对于数学研究则还要加上一点：这个世界的合理性，首先在于它可以用数学来描述。在古代，这个信念有些神秘色彩。可是发展到现代，科学经过了多次伟大的综合。多少随意地列举一些：欧几里得的综合。牛顿的综合；麦克斯韦的综合；爱因斯坦的综合；量子物理的综合；计算机的出现，哪一次不是或多或少遵循这个信念？也许有例外：达尔文和孟德尔，但是今天已经开始，人们在用数学去讨论物种的进化与竞争，讨论遗传的规律。人们会又一次看见宇宙的根本规律表现为一种抽象的、至少是数学味很重的设计图。这不是幻想而是现实。为什么DNA的双螺旋结构是在卡文迪什实验室完成，受了研究分子结构的X射线衍射方法那么多好处？难道看不出这也是一种把生命归结为最简单成分的不同位置、不同形式、不同数量而成的数学味很重的结构吗？这种深层次的研究是能破除迷信的，它鼓励人们按照最深刻的内在规律来考虑事物。我们为世界图景的精巧和合理而欣喜而惊异。这种感情正是人类文化精神的结晶。数学正是在这样的文化气氛中成长的，而反过来推动这种文化气氛的发展。现在应该提出的问题是，对这样一种信念应该怎样去估价？是否还应该同时也看到它的不足的一面？从科学史看来，一直存在一种“还原”的倾向：把复杂的现象归结为一些最简单的最原始的因素的作用。物体分成了“质点”、“电荷”；分成了分子、原子、亚原子的粒子；生物分成了细胞，然后又是细胞核、细胞质、染色体、基因、核酸……丰富无比、千差万别的世界的多样性似乎越来越被归纳为这些基本的成分或称为宇宙的砖石在数量上、形状上、结构上的差别，这当然是数学发挥作用的大好场所。同时也就产生了一种越来越深刻的疑问：大千世界真是由这些最简单的成分叠加的吗？难道线性的叠加原理竟是宇宙的最根本法则吗？由一堆砖石固然可以建成宏伟的纪念碑，却也可以搭起一座马棚，它们的区别究竟何在？可是，每一个从事数学研究的人仍然抱有下面说的信念：想解决这个更深刻的问题——我把它称为综合，而把那种还原的倾向称为分析——仍然要靠数学，当代数学的发展将越来越证实这一点。

数学的再一个特点是它不仅研究宇宙的规律，而且也研究它自己。在发挥自己力量的同时又研究自己的局限性，从不担心否定自己，而是不断反思、不断批判自己，并且以此开辟自己前进的道路。它不断致力于分析自己的概念，分析自己的逻辑结构。它不断地反思：自己的概念、自己的方法能走多远？从希腊时代起，毕达哥拉斯认为宇宙即数（他是指自然数），可是遇到了无理数，后来的希腊人只好采用不可公度理论，因为弄不清，就干脆不讲无理数，而讨论一般的线段长。希腊人甚至不讲数，使希腊数学与其他民族——例如中国——相比呈现了缺点。但即令如此，也要保持高度严整，而不允许采取折衷主义的态度。历史终于证明，正是希腊人开辟了研究无理数系的道路。他们研究数学，却同时考虑数学研究的对象是否存在。希腊人考虑数学对象的存在问题，把存在归结为可构造，然后就问：“用直尺

与圆规经有限步骤去三等分任意角可能吗？”因为弄不清是否可能，即没有构造的方法以证明三等分角的存在，他们的几何学中干脆不讲一个角的三分之一，只讲平分线，从不讲角三分线。越向后面发展，数学就出现了越来越多的“不可能性”： $x^2+1=0$  不可能在实数域中求解，五次以上的方程不能用根式求解。平行线公理能不能证明？到 20 世纪初才知道是既不能证明又不能否定。大家都说，数学最需要严格性，数学家就要问什么叫严格性？大家都说，数学在证明一串串的定理，数学家就要问什么叫证明？数学越发展，取得的成就越大，数学家就越要问自己的基础是不是巩固。越是在表面上看来没有问题的地方，越要找出问题来。乘法明明是可以交换的，偏偏要研究不可交换的乘法。孟子自嘲地说：“予岂好辩哉？予不得已也！”数学家只需要换一个字：“予岂好‘变’哉？予不得已也！”当然，任何科学要发展就要变。但是只是在与实际存在的事物、现象或实验的结果发生矛盾时才变。惟有数学，时常是在理性思维感到有了问题时就要变。而且，其他科学中“变”的倾向时常是由数学中的“变”直接或间接引起的。当然，数学中许多重要的变是由于直觉地感到有变的必要，感到只有变才能直视宇宙的真面目。但无论如何，是先从思维的王国里开始变，即否定自己。这种变的结果时常是“从一无所有之中创造了新的宇宙”。

到了最后，数学开始怀疑起自己的整体，考虑自己的力量界限何在。大概是到了 19 世纪末年，数学向自己提出的问题是：“我真是一个没有矛盾的体系吗？我真正提供了完全可靠、确定无疑的知识吗？我自认为是在追求真理，可是‘真’究竟是指什么？我证明了某些对象的存在，或者说我无矛盾地创造了自己的研究对象，可是它们确实存在吗？如果我不能真正地把这些东西构造出来，又怎么知道它是存在的呢？我是不是一张空头支票，一张没有银行的支票呢？”

总之，数学是一株参天大树，它向天空伸出自己的枝叶，吸收阳光。它不断扩展自己的领地，在它的树干上有越来越多的鸟巢，它为越来越多的学科提供支持，也从越来越多的学科中吸取营养。它又把自己的根伸向越来越深的理性思维的土地中，使它越来越牢固地站立。从这个意义上来讲，数学是人类理性发展最高的成就（或者再加上“之一”二字更好一些）。

数学深刻地影响人类精神生活，可以概括为一句话，就是它大大地促进了人的思想解放，提高与丰富了人类的整个精神水平。从这个意义上讲，数学使人成为更完全、更丰富、更有力量的人。爱因斯坦说的“得到解放”，其实正是这个意思。

数学作为文化的一部分，其最根本的特征是它表达了一种探索精神。数学的出现，确实是为了满足人类的物质生活需要。可是，离开了这种探索精神，数学是无法满足人的物质需要的。“风调雨顺”是人类的物质生活不可少的。可是“巫师”的“祈雨”不也是满足需要的“手段”之一吗？人总有一个信念：宇宙是有秩序的。数学家更进一步相信，这个秩序是可以用数学表达的，因此人应该去探索这种深层的内在的秩序，以此来满足人的物质需要。因此，数学作为文化的一部分，其永恒的主题是“认识宇宙，也认识人类自己”。在这个探索过程中，数学把理性思维的力量发挥得淋漓尽致。它提供了一种思维的方法与模式，提供了一种最有力的工具，提供了一种思维合理性的标准，给人类的思想解放打开了道路。现在人人都知道

实验方法的重要性，但是任何科学实验，离开了一定的逻辑思维，将是没有意义的。在伽利略的时代就是这样，他的许多实验都是所谓理想实验，在近代就更是这样。在不同的时代有不同的文化，不同的民族有不同的文化。但是，数学在文化中的这一地位是不可移易的，并且日益加强。有人认为数学是现代文化的核心或基石，始终处于中心地位，而影响到人类知识的一切部门。似乎没有必要去争这个“中心”或“核心”的地位，但是历史已经证明，而且将继续证明，一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。