数学之美的欣赏

常州市教研室　孙福明

简洁美

数学美首先体现于她的简洁美。数学的简洁美初看表现为数学外在形式的朴素，简单。爱因斯坦说：“美，本质上终究是简单性。”数学的简洁美不只表现在数学语言、符号、图形等外在形式的简洁性，还表现在命题的表述和论证、数学逻辑体系的简洁性。

数学中人们对于简洁的追求是永无止境的，如建立公理体系时，人们试图找出最少的几条，命题的证明人们力求严谨、简练，计算的方法尽量便捷、明快等等。数学历史中每一次进步都使已有的定理更简洁。希尔伯特曾说过：“数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着”。

用“少”去表现“多”，或者求极大、极小等，均是数学简洁性的另类表现。

如数学的公式、定理、方程等，言简意赅，蕴含丰富而深刻的数学意义：

三角形，尽管千姿百态，但简洁的公式 $S=\frac{1}{2}ah$（a 为底边长，h 为该边上的高）或海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（$p$ 为三角形半周长）囊括了所有三角形的面积；

$ab=ba$ 简明地表示了加法的交换律；

正、余弦定理也概括了三角形边、角的一般关系；

在极坐标系下，圆锥曲线的统一方程 $\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$。

以少胜多的两个例子：钱币种类只须有一分、二分、五分、一角、二角、五角、一元、二元、五元、十元、……，就可以简单支付任何数目的款项。

欧拉研究天平砝码最少配置问题，证明了下列两个结论：若有 1，2，2^2，2^3，…，2^n 克的砝码，只允许其放在天平的一端，利用它们可以称出 $1\sim 2^{n+1}-1$ 之间任何整数克重物体的质量；若有 $1,3,3^2,3^3,\ldots,3^n$ 克的砝码，允许其放在天平两端，利用它们可以称出 $1\sim\frac{3^{n+1}-1}{2}$ 之间任何整数克重物体的质量。

关于极大、极小的例子：

平面上围成同样面积的所有封闭曲线中，以圆的周长为最短；

植物的叶序排布，某些植物相邻两叶片在茎上排布夹角为$137°28'$（周角的黄金分割点），以使通风和受光效果最佳；

蜂巢是许多类似六棱柱的蜂房构成的，每个蜂房的一端由三个同样的菱形覆盖，每个菱形的钝角是 109°28′，这样结构的蜂房可以铺满空间，且在同样体积下最省材料；

人的血管的直径粗细之比$\sqrt[3]{2}:1$，输导液体时能量消耗最少.

符号美

符号美是数学特有的美感。数学符号简洁明了，方便易识，为世界各国所通用，数学语言可以说是建立在符号系统之上的。几乎每一个数学分支都是靠一种符号语言而生存，数学符号是贯穿于数学全部的支柱。

数学符号的产生（发明）、使用和流传（传播）经历的是一个十分漫长的过程，这个过程的始终贯穿着人们对自然、和谐和美的追求。古代数学的漫长历程、今日数学的飞速发展；17、18 世纪欧洲数学的兴起、我国几千年数学进展的缓慢，这些某种程度上都与能否恰当运用数学符号有关，简练、方便的数学符号对书写、运算、推理、交流，都是极其方便和重要的。

数学符号还包括图形：点、线、面、体的产生正是人们对客观事物的抽象和概括。

数及其运算只有用符号去表示，才能更加确切和明了。历史上不同民族创造了过各种记数系统与符号，现在普遍使用的阿拉伯数字据说是印度人发明的，后传入阿拉伯国家，经阿拉伯人改进、使用，因其简便性而传遍整个世界，成为通用的记数符号。

代数学就某种意义上说就是符号形式的运算。比如“方程”符号，历史上最早是埃及出土的 3600 年前的莱因特纸草上的一串符号，直到 17 世纪笛卡儿第一个用x, y, z表示未知数，他曾用$xxx--9xx+26x--24\infty 0$表示$x^3-9x^2+26x-24=0$，这与现在方程的写法几乎一致。1693 年沃利斯（J.Wallis）创造了现在人们仍在使用的记号：$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$。数学表达式的演变正是人们追求数学和谐、简洁、方便、明晰的审美过程。

数学图形比生活中的图形更加简洁明了，可以简明概括地表示各种空间结构，舍弃各种无关的因素。

例如著名的哥尼斯堡七桥问题：俄国的加里宁格勒，18 世纪称为哥尼斯堡，是一座历史名城。城中有一条河，两条支流环抱着的一座美丽小岛。河上共建有七座桥，吸引了众多游客观光。有人提出了一个问题：能不能一次不重复地走遍所有七座桥，最后仍回到出发点？

欧拉用简明的图形表示这七座桥的位置关系，从而把七桥问题归结为一笔画问题解决

了，进而导致了“拓扑学”乃至“图论”这门学科的创立。

一个简单的数学符号，有着广泛而深远的意义。

1+2=3，再简单不过了，但这组抽象的符号可以表示一对夫妻、一个孩子组成的三口之家，或意味着 2 步奔跑以后一次腾空的飞跃构成的三级跳……

一个简单的数学符号，往往承载着一段历史、一些故事。

看到“π”，我们自然联想到圆周率 3.1415926535897……看似枯燥的、长长的数字串后面，隐藏着计算之路的漫漫征程，折射出数学家锲而不舍、追求精确的精神品质，如我国古代数学家刘徽这样描述“割圆术”:“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”。面对“√2”这一差点被无理的行为淹没的无理数，我们一直难以忘怀那位最初因发现√2 的无理性而被抛进大海的希帕索斯（公元前五世纪毕达哥拉斯学派成员）。

抽象美

数学的第一特点在于她的抽象性，比如数学中的直线是没有宽度的、“笔直笔直的”，而现实生活中的直线总是有宽度的、有“毛边”的（不信你可以放大看看）；又如，用“n”表示自然数，它不是 n 个岗位，n 只鸡或 n 张照片……，也不是哪一个具体的数，分不清是 0 ，是 1，或者说 100，……“知道”中蕴含着“不知道”，“具体”中充满了“不具体”，它就是这样一个抽象的数！在数学中所处理的是抽象的量，是脱离了具体事物内容的用符号表示的量，比具体事物更具纯净、广博和超然之美。

G．Chrystal 曾说：“就其本质而言，数学是抽象的；实际上它的抽象比逻辑的抽象更高一阶。”数学概念是从众多事物共同属性中抽象出来的，在数学知识日益扩展、信息大爆炸时，对纷繁复杂的数量关系、空间形式、关系结构进行简化、廓清和统一化，抽象提炼更是必不可少的。从初等数学的基本概念到现代数学的各种原理都具有普遍的抽象性与一般性。

以数和形的发展为例：

数的拓广就是一个不断概括、抽象的过程，从自然数到有理数、实数、复数，直至四元数，抽象程度越来越高。由于引进了有理数、实数、复数，代数方程 $2x=-1, x^2=2, x^2=-1$ 都有解了，如此完美的结果，无疑得益于数的拓广和抽象度的提高。

几何研究的图形，从实物、模型到舍弃了具体属性的理想图形（如正三角形、正方形、如圆等），从平面图形到空间图形，从单纯的几何图形到代数方程表示的曲线曲面，更高的抽象度给人以更大的想象空间和创造自由，体现了抽象的力量和美。

数学与音乐同样具有抽象性：历史上不少著名人物都，迷恋音乐，大数学家克兰纳克就是一例。这位数学王子何以如此迷恋音乐？原因也许是多方面的，最重要的一点或许是因为数学和音乐均为抽象语言，它们都充满了抽象美、自由美。而且，数学和音乐还是两个人造的金碧辉煌的世界，前者仅用十个阿拉伯数字和若干符号便造出了一个无限的、绝对真的世界，后者仅用五条线和一些蝌蚪状的音符就造出了一个无限的、绝对美的世界。如果说，音乐是人类感情活动最优美的表现，那么数学便是人类理性活动最惊人的产品。

抽象是与具体相对、相互依存的。一种层面的抽象在更高的抽象层面看就是具体的，如有理数比自然数抽象，但比起实数就是具体的了。

一方面，借助于抽象，可使我们的认识从具体的现实走向深远的境地、理想的彼岸。试看一个常见的问题：把一张普通的纸不断对折，折 30 次（不可能真正实现）后，纸叠得有多厚？也许你不信，竟然比喜马拉雅山还高！可见正是由于数的抽象，依靠人的抽象思维，那些“貌不惊人”的数，竟会大得难以想象，这正是数学的抽象之美。

另一方面，具体是抽象的基础，借助于具体例子，可以使抽象的躯干血肉丰满，得到更好的理解。如历史上数学家从赌博输赢研究入手的推算，导致“概率论”和“对策论”学科的出现。

和谐美

和谐即雅致、严谨或形式结构的无矛盾性。数学的和谐美指数学内容与结构系统的协调完备和数学所表现出来的均衡对称。没有那门学科能比数学更为清晰的阐明自然界的和谐性。庞加莱指出：“在解中，在证明中，给我们以美感的东西是什么呢？是各部分的和谐，是它们的对称，是它们的巧妙、平衡”。

数学的严谨自然流露出它的和谐，为了追求和谐，数学家们一直努力，以消除不和谐，如悖论，但是通过消除这些不和谐的事例，反过来导致和促进数学的进一步和谐发展。

如著名的黄金分割比 ，即 0.61803398…。在正五边形中，边长与对角线长的比是黄金分割比。人们的膝盖骨是大腿与小腿的黄金分割点，人的肘关节是手臂的黄金分割点，肚脐

是人身高的黄金分割点；当气温为 23 摄氏度时，人感到最舒服，此时 23:37（体温）约为 0.618；名画的主题，大都画在画面的 0.618 处，弦乐器的声码放在琴弦的 0.618 处，会使声音更甜美。建筑设计的精巧、人体科学的奥秘、美术作品的高雅风格，音乐作品的优美节奏，交融于数的对称美与和谐美之中。

黄金分割比在许多艺术作品中、在建筑设计中都有广泛的应用。达 芬奇称黄金分割比为“神圣比例”．他认为“美感完全建立在各部分之间神圣的比例关系上”。

再如体现生命的和谐之美的螺线：

螺线，不仅出现在螺壳上，自然界中的许多动植物都会用它展现和谐美妙的曲线美，如向日葵子在花盘上的排列是按螺线方式，蜘蛛的网呈螺线结构，植物的叶在茎上环绕成螺线等。数学家们欣赏、感叹螺线的和谐、动感之美并进行深入研究，于是有了阿基米德螺线、对数螺线……

生命的遗传物质 DNA 具有双螺旋结构，这一和谐灵动的结构的发现与数的和谐对应密切相关！ 1952 年，化学家 E.查伽夫测定了 DNA 中 4 种碱基的含量，发现其中腺膘呤与胸腺嘧啶的数量相等，鸟膘呤与胞嘧啶的数量相等。这使沃森、克里克立即想到 4 种碱基之间存在着两两对应的关系，形成了腺膘呤与胸腺嘧啶配对、鸟膘呤与胞嘧啶配对的概念，为进一步确定 DNA 的双螺旋结构奠定了基础。

螺线，生命的曲线，和谐的音符！

当然，数学中也有不和谐因素，数学史上发生过三次数学危机，数学家们为了追求数学体系的和谐，努力化解危机，推动了数学的发展。

第一次数学危机由古希腊毕达哥拉斯学派引起，他们认为，宇宙间的一切现象都归结为整数或整数之比（称为可公度量），但该学派的成员希伯索斯发现，边长为 1 的正方形的对角线长度既不是整数，也不是整数的比。这一发现严重地违背了毕达哥拉斯学派的信条，相传希伯索斯因这一发现被投入海中淹死，这就是第一次数学危机。后来古希腊数学家欧多克斯引进了“量”的概念，重新定义了比例，默认了无理数的存在，消除了矛盾，解除了第一次数学危机。

第二次、第三次数学危机分别与微积分、集合论的基础不稳固有关，数学家柯西、魏尔斯特拉斯、罗素等化解危机之后，为微积分建立了严格的数学基础，避免了集合论悖论。

统一美

统一美，是指部分与部分、部分与整体之间的和谐一致。统一美反映的是审美对象在形式或内容上的某种共同性、关联性或一致性，它能给人一种整体和谐的美感。

数学的统一美有两方面的表示，一是数学对其它科学的统一，二是数学本身的统一。数学方法的普遍适用性，使得各门学科都有数量关系的特征，体现了数学对其他科学的统一。数学内部也在不断地寻求和谐与统一。数学的发展是逐步统一的，统一的目的正如希尔伯特所说："追求更有力的工具和更简单的方法。"

统一是归宿，找到了统一也就揭示了本质，找到了数学不同对象之间的内在联系，因而统一也是数学家梦寐以求的目标。

自然数、负数、分数等，都可以统一在有理数范围内，具有统一的形式 p/q(其中 p,q 是整数，q 不为零)；数的概念从自然数、分数、负数、无理数，扩大到复数，经历了无数次坎坷，范围不断扩大了，在数学及其他学科的作用也不断地增大。那么，人们自然想到：能否再把复数的概念继续推广？

英国数学家哈密顿为此苦苦思索了 15 年，后来，他牺牲了复数集中的一条性质，终于发现了四元数，即形为 $a_1+a_2i+a_3j+a_4k$ （a_1 ，a_2 ，a_3 ，a_4 为实数）的数，其中 i、j、k 如同复数中的虚数单位，满足几条特定的法则。若 $a_3=a_4=0$，则四元数 $a_1+a_2i+a_3j+a_4k$ 是一般的复数。四元数的研究推动了线性代数的研究，并在此基础上形成了线性代数理论。物理学家麦克斯韦利用四元数理论建立了电磁理论。

中学代数的很多概念，可以从函数的观点统一理解：如方程 $2x+3=0$ 的解,可以看成函数 $y=2x+3$ 的图象与 x 轴交点的横坐标；

一些著名的不等式，如算术—几何平均值不等式、柯西不等式、三角形不等式、幂平均不等式，…，都可以统一在更强、结论更普遍的不等式——琴生不等式中；

各种柱、锥、台体以及球、球缺、球台的体积公式，均可由拟柱体体积公式得出；

布尔巴基学派的《数学原理》用"结构"的思想和语言来重新整理各个数学分支，在本质上揭示数学的内在联系，使之成为一个有机整体，在数学的高度统一性上给人以美的启迪。

数学是一个辩证统一体：初等数学中，历史上有理数与无理数统一为实数，实数与虚数统一为复数，看似对立的数也有共性，可以在更大范围内达到统一；平面几何学研究在平移、旋转、对称、相似等变换下图形的不变性（量），如线段和角的相等、线段比的不变等，这体现了变化与不变的辩证统一；笛卡儿创立的解析几何实现了几何与代数的统一：几何使代数变得直观，代数使几何运算方便；点与坐标、曲线与方程之间的关系反映了数和形的深刻联系和有机统一；概率论和数理统计揭示了事物的必然性与偶然性的内在联系等。近代数学中，极限语言很好地体现了有限与无限、近似和精确的辩证关系；牛顿—莱布尼茨公式描述了微分和积分两种运算方式之间的联系和相互转化等。

形式美

数学的形式美通常指数、式的整齐、有序、简洁、对称，图形的规则、简明、优雅、奇异等。正如泰山的雄伟、长江的浩瀚代表着泰山与长江的美一样，数学也追求美的形式，如匀称规则的几何图形、整齐简练的数学方程等，当然数学形式美的含义更加深邃。寻求一种最适合表现自然规律和数学内在结构的形式是数学美的追求。

当你在运算过程中，发现式子、图形十分杂乱、丑陋、繁复，你很可能就走入迷途或错误的方向。因此，数学的形式美虽然是一种的外在形式，但往往与数学的公式、结构和方法的简洁美、和谐美、对称美等内在美密切相关，并非徒有外表的漂亮中看。

下面是一些经典的例子：

一些特殊形式的数，如梅森数、费马数、Schinzel 数等，自身也是非常具有形式美；

水仙花数是指一个 n 位数（$n \geq 3$），它的每个位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。例如 153： $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$；

哥德巴赫猜想：不小于 6 的偶数都是两个奇质数和；

费马定理：每个 4k+1 型质数都是两个完全平方数和；（1754 年欧拉已经证明）；

三角形的三条中线、三条角平分线、三条边的垂直平分线分别交于一点，依次称为三角形的重心、内心、外心，结论的确定可靠、多线的完美相交，令人感叹不已！

利用勾股定理可以推证美丽奇妙的月牙定理，它表明由曲线围成的图形的面积可以等于直角三角形的面积；

“完美正方形”是指一个可以被分割成有限个大小彼此不相同的小正方形的正方形，

1967 年，威尔森（J.R.Wilson）成功构造 25 阶、26 阶完美正方形。1982 年，荷兰特温特技术大学的杜伊维斯廷（A.J.W.Duijvestijn）证明了“不存在低于 24 阶的混完美正方形”，完美正方形的讨论才画上完美句号；类似的“完美矩形”；

多圆相切的斯坦纳圆链、只有一个面的麦比乌斯带，更是几何拓扑世界的奇葩；

毕达哥拉斯学派的人们非常注意数的形象美，他们把数按照可用石子摆成的形状来分类：如“三角数”、“四角数”、“五角数”、……；

“幻方”由于蕴含着奇妙的数字美，引起了数学爱好者和数学家的兴趣和研究；

数是抽象的，图是直观的，数形的巧妙结合是数学美的一大特点。“数”与“形”的结合也是人们追求形式美的结果，“形”的直观可以给出“数”的性质以最生动说明或诠释，反之，“数”的简练又常使图形中某些难以表达的性质得以展现。解析几何就是最好的例子。还有借助于单位正方形，利用分割的方法，可以直观得到：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$。

对称美

所谓对称性，指组成某一事物或对象的两个部分的对等性，即图形或物体对某个点、直线或平面而言，在大小、形状和排列上具有一一对应关系。从古希腊的时代起，对称性就被认为是数学美的一个基本内容。数学中的这种对称处处可见：几何中具有的对称性（中心对称、轴对称、镜象对称等）的图形很多，都给我们一种舒适优美的感觉。几何变换也具有对称性。

例如：

毕达哥拉斯学派认为，一切空间图形中，最美的是球形；一切平面图形中，最美的是圆形。圆是中心对称圆形——圆心是它的对称中心，圆也是轴对称图形——任何一条直径都是它的对称轴；

立方体、球等都是点、线、面对称图形；

梯形的面积公式：$S=\frac{(a+b)h}{2}$，

等差数列的前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，

其中 a 是上底边长，b 是下底边长，其中 h 是高；a_1 是首项，a_n 是第 n 项，这两个等式

中，a 与 a_1 是对称的，b 与 a_n 是对称的，h 与 n 是对称的；

对称美的形式很多，对称的这种美也不只是数学家独自欣赏的，人们对于对称美的追求是自然的、朴素的。如我们喜爱的对数螺线、雪花，知道它的一部分，就可以知道它的全部。李政道、杨振宁也正是由对称的研究而发现了宇称不守恒定律。从中我们体会到了对称的美与及其应用价值；

1931 年英国著名物理学家狄拉克从数学对称美考虑，大胆提出反物质的假说：真空中的反电子就是正电子。1932 年美国物理学家安德逊（C.D.Anderson）在宇宙射线中发现了正电子。

奇异美

奇异美指奇妙、变异，数学的很多结论奇妙无比、令人惊叹，使得数学充满独特的魅力。变异则是数学理论拓广或统一性遭到破坏后，产生新方法、新思想、新概念、新理论的起点。数学中许多新分支的诞生都是人们对数学奇异性探讨的结果，在数学发展史上，正是由于数学自身奇异性的魅力，吸引着数学家向更深、更新的层次探索。奇异的东西引起学习的兴趣，引起研究的兴趣，又从研究之中看到奇异深处所隐藏的东西，发现其中的规律，这种成就感又会激励人们进一步去研究探索，更能看到其中的美。

例如：

人造卫星、行星、彗星等由于运动的速度的不同，它们的轨道可能是椭圆、双曲线或抛物线，这几种曲线的定义如下：到定点距离与它到定直线的距离之比是常数 e 的点的轨迹，当 e<1 时，形成的是椭圆．当 e>1 时，形成的是双曲线．当 e=1 时，形成的是抛物线．
常数 e 由 0.999 变为 1、变为 0.001，相差很小，形成的却是形状、性质完全不同的曲线，而这几种曲线又完全可看作不同的平面截圆锥面所得到的截线。

众所周知，满足勾股定理（国外又称毕达哥拉斯定理）$c^2 = a^2 + b^2$（其中 a，b 为直角三角形的两条直角边长，c 为斜边长）的正整数 a，b，c 有无数组，自然人们会问：更一般地，是否有正整数 a，b，c 满足 $a^n + b^n = c^n$（$n \geqslant 3$）呢？1640 年前后，费马在他阅读古希腊数学家丢番图的著作《整数论》中关于毕达哥拉斯三角形一节的空白处写到：“$n \geqslant 3$ 时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有非零的整数解。我找到了这个定理的奇妙证明，可惜这里太窄，无法把它写下。”这段话吸引了无数著名的数学家涉足它。直到三个世纪过去，1993 年夏，数学家怀尔斯潜心 7 年研究，在剑桥大学的学术报告会上宣布他已证得费马定理，但是人们在他

的报告中发现了漏洞，一年后，1994 年 10 月 25 日，怀尔斯和他的学生泰勒（R.Taylor）修补了上述文章的缺陷，次年 5 月美国《数学年刊》全文刊出了他们的文章《模椭圆曲线与费马大定理》和《某些 Hecke 代数的还论性质》，至此宣告：困扰人们三个世纪之久的费马大定理被攻克。

描述雪花曲线的科赫（Koch）曲线在实施变换加密的过程中，其周长趋于无穷大，但是面积却趋于定值。